流動性不足と信用リスクの分析
-流動性デフォルトリスクの構造型アプローチに関する一考察-
高岡論文 討論資料

一橋大学大学院国際企業戦略研究科
中村信弘
第 1 回一橋大学政策フォーラム

7 月 21 日, 2016 年

1. 研究の貢献とコメント

- 信用リスクモデルの代表的アプローチ
  - 構造型アプローチ（**Merton**)

$$V_T < D \Longrightarrow \text{(デフォルト)}$$

  - 誘導型アプローチ
    - 格付け推移行列（**Jarrow et al.**）
    - ハザードレート（**Duffie-Singleton**）

- (貢献) 構造型アプローチに基づく流動性デフォルトリスクの分析

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t) - c dt,$$

$$V_t = e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}\left(V_0 - \int_0^t \frac{c du}{e^{\sigma W_u + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)u}}\right),$$

$$\tau = \inf\{t \geq 0 | V_t < 0\} \quad \text{(デフォルト時刻)}$$

- 永久債発行企業の株主価値の解析解

$$\tilde{E}\left[\left(V_0 - c\int_0^{\infty} e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right)^{+}\right] \tag{1.1}$$

- 負債価値の解析解

$$\tilde{E}\left[\min\left\{V_0, c\int_0^{\infty} e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right\}\right] \tag{1.2}$$

- 資産代替性；　リスクの高い資産にシフトすると株主価値（**Asian put**）は高まり、負債価値は低下する。

- **Leland model;**

$$S_t = \max_{\tau} \mathsf{E}_t^Q\left[V_t - e^{-r(\tau-t)}V_\tau - \int_t^{\tau} e^{-r(u-t)}(1-t_x)cdu\right]$$

ここで、τ **:(**内生的**)** デフォルト時刻、t_x **:**税率

– S_t の解析解**,** フラットなデフォルト境界 $V_b \propto (1-t_x)c$

– 負債価値の解析解、　最適資本構成

♠ 永久債発行の場合の解析解導出の鍵

- **Dufresne**の公式

$$\frac{a^2}{2}\int_0^\infty e^{aW_u - bu}du \sim \mathcal{IG}\left(\frac{2b}{a^2}, 1\right) \tag{1.3}$$

♠ 有限の満期の負債の場合

- 株主価値は**Asian put option**の形

$$\tilde{E}\left[\left(V_0 - c\int_0^T e^{\sigma\tilde{W}_u - (r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right)^+\right] \tag{1.4}$$

- **Asian option** の満期に関する **Laplace** 変換は解析解が求められている（**Yor[1],(3.10))**

$$\int_0^\infty dhe^{-\lambda h}C^{(\nu)}(h,q) = \frac{\int_0^{1/(2q)} dxe^{-x}x^{\frac{\mu-\nu}{2}-2}(1-2qx)^{\frac{\mu+\nu}{2}+1}}{\lambda(\lambda-2-2\nu)\Gamma(\frac{\mu-\nu}{2}-1)} \tag{1.5}$$

ここで

$$C^{(\nu)}(h,q) := \mathbf{E}\left[\left(A_h^{(\nu)} - q\right)^+\right], \quad A_h^{(\nu)} := \int_0^h e^{2(W_s+\nu s)}ds. \tag{1.6}$$

- 逆Laplace変換により、評価が可能
- 因みに、Average process はBMと指数νのBessel processで関係する。

$$e^{W(t)+\nu t} = R^{(\nu)}\left(A_t^{(\nu)}\right) \tag{1.7}$$

- (比較静学関連) 図7-1で、有限の満期の負債価値は永久債よりは安くなる。株式価値は永久債発行企業の株式価値より高くなる。

$$\int_0^T e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du < \int_0^\infty e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du \quad a.e. \tag{1.8}$$

より、

$$\tilde{E}\left[\left(V_0 - c\int_0^T e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right)^+\right] > \tilde{E}\left[\left(V_0 - c\int_0^\infty e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right)^+\right]$$

$$\tilde{E}\left[\left(V_0, c\int_0^T e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right)^+\right] < \tilde{E}\left[\left(V_0, c\int_0^\infty e^{\sigma\tilde{W}_u-(r+\frac{\sigma^2}{2})u}du\right)^+\right]$$

であるから

$$\mathcal{E}_t^{(T)} > \mathcal{E}_t^{(\infty)}, \quad \mathcal{B}_t^{(T)} < \mathcal{B}_t^{(\infty)}. \tag{1.9}$$

- 信用スプレッドの期間構造

$$s(T-t) := -\frac{1}{T-t}\log(\mathcal{B}_t(T)) - r,$$

$$s(T-t) > -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T-t}\log(\mathcal{B}_t(T)) - r$$

♠ 質問

- 実証研究：信用リスクの計測方法？
- **Merton model**では倒産確率の計算

$$\mathbb{P}(V_i(T) < D), \quad i = A, B$$

このモデルでは？

$$\mathbb{E}(\tau_A) < \mathbb{E}(\tau_B)$$

なら、A社のほうが、B社より信用リスクが高い。

- その他の信用リスクの代理変数の作り方
- 倒産コストと税金を考慮したモデルへの拡張の試みは？

2. *

References

[1] **Yor,M.,** *Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes*, **Springer,2001.**