流動性の不足と信用リスクの分析

一橋大学政策フォーラム

2016年7月21日

高岡浩一郎

(一橋大学大学院商学研究科)

k.takaoka@r.hit-u.ac.jp

1．はじめに

本研究では，債券発行済み企業の流動性デフォルトリスクに焦点を当て，

- 完全情報下の構造型アプローチで数理的に分析する一般的フレームワークを論じ，Merton モデルもこのフレームワーク内で論じることができることを示す．

- この一般的フレームワークを永久債発行企業に適用し，株主価値や債券価格の新しい解析解を導出する．

なお，構造型アプローチとは，企業価値を原資産とするプットオプションのショートポジションとして社債を捉え，オプション価格付け理論を援用して証券価格や信用リスクを統合的に分析する手法．

構造型アプローチに関する先行研究

- Merton (1974)
  企業価値が確率過程に従い，すべての社債は同一満期でクーポン支払いは無く，満期において企業価値が社債額面を下回ればデフォルトとみなすという設定を考えることにより，企業の流動性デフォルト (liquidity default) を分析している．

- Black and Cox (1976)
  一時点のみならず様々な時刻でのデフォルトを表現できるように，ある境界への企業価値の初到達時刻をデフォルト時刻とみなしている．流動性リスクではなく安全条項 (safety covenants) に基づく清算 (liquidation) をモデル化している．

- Leland (1994), Leland and Toft (1996)
  倒産コストと節税効果を考慮に入れ最適資本構成を導くというコーポレートファイナンス的議論の一環として，デフォルトを捉える．内生的倒産 (endogenous bankruptcy).

- Longstaff and Schwartz (1995),
- Duffie and Lando (2001),
- Nakamura, N. (2001),
- Ziegler (2004),
- Nakamura, H. (2012),
- Goto and Suzuki (2015),
- Sundaresan (2013)【レビュー論文】

2．今回の一般的フレームワーク

以下のような設定を考える．

- 連続時間で無限満期の設定を考え，企業は各時点における資産全額を，ある取引可能かつ分割可能なリスク資産に投資しているとする．ここでリスク資産1単位あたりの価値 S_t は確率過程で，その値は正とする．経路は連続でもジャンプがあっても良い．

- この企業は債券（1種類でも複数種類でも良い）を発行済みで，時刻ゼロ（の直後）から t までに支払う額面やクーポンの累積額を C_t と記す． C_t は決定論的である必要はなく，確率過程でも良い．

- 新規債券や新株は発行しない．

- 情報の非対称性は考えない．

- デフォルトの種類として流動性デフォルトのみに焦点を当てるため，ここでは倒産コストや節税効果は考えない．

注.　数学的には，S_t はあるフィルター付き確率空間上のセミマルチンゲールであり，確率１で，すべての時刻 $t \geq 0$ に対して $S_t > 0$ かつすべての時刻 $t > 0$ に対して $S_{t-} > 0$ であると仮定する．また，C_t は適合的な確率過程で，経路は有限変動かつ右連続であり，$C_0 = 0$ であると仮定する．

額面・クーポン支払い後の企業価値 V_t は，次式を満たすことになる：

$$dV_t = V_{t-}\frac{dS_t}{S_{t-}} - dC_t. \tag{1}$$

命題 1.　上式 (1) が成り立つための必要十分条件は

$$V_t = S_t\left(\frac{V_0}{S_0} - \int_0^t \frac{dC_u}{S_u}\right). \tag{2}$$

数学的には，伊藤の公式を用いて証明できる．また，(1) $\Rightarrow$ (2) については，途中の各時刻 $0 < u < t$ で支払われる額面・クーポンをすべてリスク資産で再運用したときの時刻 t での価値に V_t を加えた $V_t + \int_0^t \frac{S_t}{S_u} dC_u$ が，初期時点から V_0 を全額リスク資産で運用したときの時刻 t での価値 $V_0 \frac{S_t}{S_0}$ と等しくなることから示すこともできる．

流動性デフォルト時刻 τ は

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 \,\middle|\, V_t < 0\right\}$$

と定式化できる【ただし $\inf\emptyset = \infty$】が，(2) 式より，これは 以下とも等しい：

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 \,\middle|\, \frac{V_0}{S_0} < \int_0^t \frac{dC_u}{S_u}\right\}. \tag{3}$$

注. Merton モデルは，以下のように考えることによって上のフレームワーク内で論じることができる．有限満期時刻 T までの企業価値 S_t が拡散過程に従うと仮定し，満期 T における企業価値 S_T が社債額面 K （予め定めた正定数）を下回れば流動性デフォルトが起きたとモデル化するのが Merton モデルであるが，確率過程 S_t の時刻 T 以降の値が S_T と等しいと定義することにより無限満期の確率過程と考え直したものを改めて S_t と記し，C_t は

$$C_t = \begin{cases} 0 & (t < T \text{ のとき}) \\ K & (t \geq T \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．そして $V_0 = S_0$ とおくと，上記の一般的なフレームワーク内に入っていることが確認できる．

3．永久債発行企業の流動性デフォルトリスク

本節では，Mertonモデルとは対照的な設定として，各時点で連続的に一定のクーポンを満期なしに払い続け，額面の償還は行わない永久債を発行済みの企業の流動性デフォルトリスクを考察する．

以下のような設定を考える．

- 永久債のクーポン率は正定数とし，c と記す．

- リスク資産1単位あたりの価値 S_t は幾何Brown運動

$$dS_t = S_t\big(\mu\, dt + \sigma\, dW_t\big)$$

に従うと仮定する．ただし，W_t は1次元Brown運動（Wiener過程）である．μ と σ は，それぞれリスク資産の瞬間的収益率およびボラティリティを表す定数（ただし $\sigma > 0$）である．

このとき，額面・クーポン支払い後の企業価値 V_t や流動性デフォルト時刻 τ に関する一般的な式 (1)〜(3) は，本節の設定下ではそれぞれ以下と等しくなる．

$$dV_t = V_t\big(\mu\,dt + \sigma\,dW_t\big) - c\,dt, \tag{4}$$

$$V_t = e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}\left\{V_0 - \int_0^t \frac{c}{e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})u}} du\right\}, \tag{5}$$

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 \,\middle|\, V_0 < \int_0^t \frac{c}{e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})u}} du\right\}. \tag{6}$$

注． V_t 自体は幾何Brown運動とモデル化していないので，本節のモデルはZiegler (2004) とは異なるモデルである．Zieglerモデルは，企業価値が幾何Brown運動に従うとモデル化し，資産は分割されず，永久債クーポン支払いは新株発行によってファイナンス可能と仮定している．

命題2.　無リスク利子率を正定数 r と仮定すると，永久債発行済み企業の現在の株主価値は

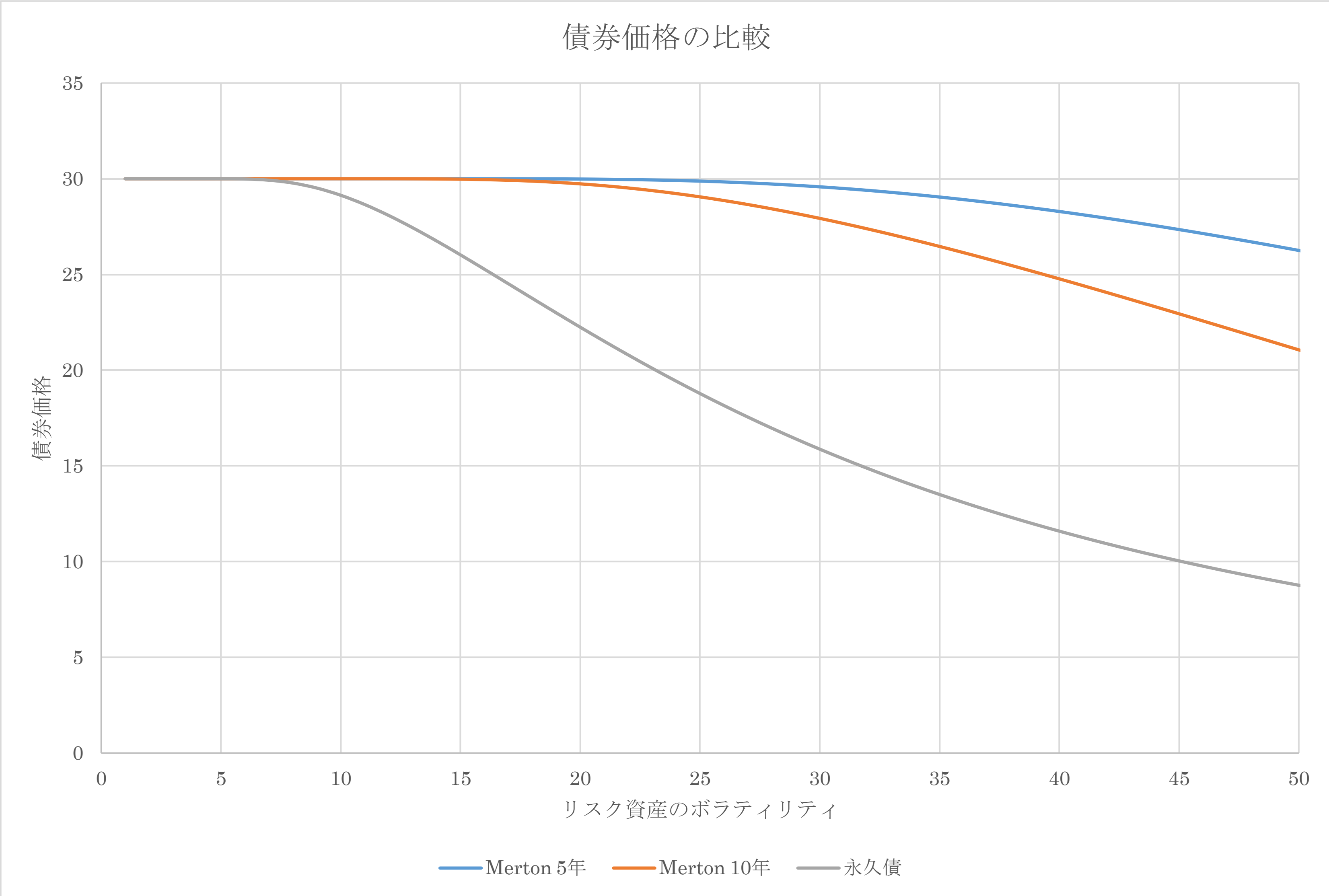
$$V_0\,Q\Big(\frac{2r}{\sigma^2}+1,\,\frac{2c}{\sigma^2V_0}\Big)-\frac{c}{r}Q\Big(\frac{2r}{\sigma^2},\,\frac{2c}{\sigma^2V_0}\Big) \tag{7}$$

また，永久債の現在価値は

$$V_0\,P\Big(\frac{2r}{\sigma^2}+1,\,\frac{2c}{\sigma^2V_0}\Big)+\frac{c}{r}Q\Big(\frac{2r}{\sigma^2},\,\frac{2c}{\sigma^2V_0}\Big) \tag{8}$$

となる．ただし，2つの関数 $P(a,x)$ および $Q(a,x)$ は regularized gamma function と呼ばれる関数で，パラメータ $a,1$ のガンマ分布の，それぞれ下側と上側の累積確率を表す.

注.　Mertonモデルにおける割引債価格式と比較するため，数値計算を行った結果が次頁のグラフである．ここで，Mertonモデルは満期が5年と10年のモデルの両方を計算対象とした．計算に用いたモデルパラメータは $V_0=100$, $r=0.01$ であり，信用リスクが無いときの各債券の現在価値が30になるように，割引債の額面や永久債のクーポンを定めた.


債券価格の比較
35
30
25
20
15
10
5
0
債券価格
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
リスク資産のボラティリティ
Merton 5年
Merton 10年
永久債

4．終わりに：今後の展望

- 一般的なフレームワークにおける仮定
  - 新規債券や新株は発行しない.
  - 情報の非対称性は考えない.

を落とし，さらに一般的な設定を考えたい．また，倒産コストと節税効果を考慮に入れることにより，Leland モデルのような内生的デフォルトも表現できるようなモデルも今後考えていきたい.

- 永久債発行企業の流動性デフォルトリスクについては，リスク資産の価格変動モデルとして Black-Scholes モデルよりも一般的な設定を考えたい.