

平成28年度第1回一橋大学政策フォーラム

# 投資行動から構築する 金融市場の価格変動モデル

小林 健太(一橋大学 商学研究科)

証券市場など、金融市場の価格変動の根本的なメカニズムを解明したい。

- ◆ 市場の値段はどのような仕組みで動いているのか？
- ◆ 市場はどこまで制御可能か？
- ◆ 市場における価格変動の本質は何か？

これらを明らかにすることで

- ◆ より有効な金融政策(例えば金融危機への適切な対処)
- ◆ 金融商品のより正確なリスク管理

などに生かしたい。

## 既存の価格変動モデル

- ◆ 最も古いのは幾何ブラウン運動によるモデル  
L. Bachelier(1900)
- ◆ 効率的市場仮説  
P. A. Samuelson(1965), B. B. Mandelbrot(1966)
- ◆ ジャンプ拡散過程モデル  
R. C. Merton(1976)
- ◆ ARCHモデル  
R. F. Engle(1982)
- ◆ GARCHモデル  
T. Bollerslev (1986)
- ◆ VGモデル  
D. B. Madan & E. Seneta(1990)
- ◆ etc. ...

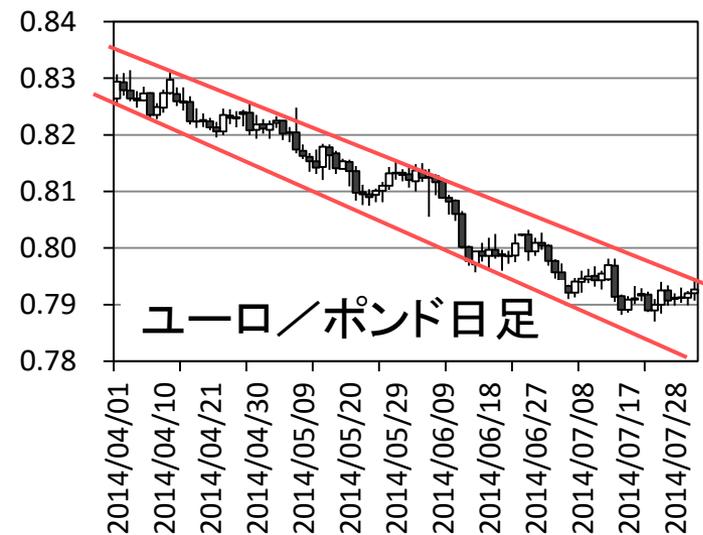
現在に至るまで、様々なモデルが提案されているが、根拠に欠ける(効率的市場仮説については一定の合理性はある)。

## テクニカルはオカルトか？

実際の市場では、上値抵抗線、下値抵抗線、トレンドライン、サイクル、エリオット波動、黄金比などのテクニカルなパターンが頻繁に出現するように見える（ただし、それで儲けるのは至難の業）。

これらは偶然そう見えるだけなのか？

学問的な俎上には現在は乗っていない（むしろオカルト扱い）



## その他にも疑問は多い

### ◆ 市場はどこまで予測可能か？

全ての投資家の投資行動パターンがわかれば、値動きの予測は可能か？（市場におけるラプラスの悪魔）

### ◆ 市場はどの程度、カオス的か？

どの程度の初期値敏感性があるか？

### ◆ 市場は崩壊し得るか？それとも大域的な安定性があるか？



過去データの統計的分析によるアプローチだけでなく  
価格変動のモデリングによる根本的理解が必要

## 均衡論と相場変動

均衡論的な考え方では日々の市場の変動を説明することはできない。

例えば為替市場では、特に原因が無くても一日に1%以上変動することが多い(本当は隠れた原因があるのかもしれないが)。

いずれにしても、一日で例えば日本の米国のファンダメンタルズが1%も変動するとは考えにくい。

原因があったとしても、数日で20%の変動はさすがに均衡論的な立場では説明できないように思われる。



## 内部要因

市場参加者のポジションそのものに由来する変動要因を**内部要因**という(需給などは外部要因といわれる)。

以下のような、内部要因に起因する変動要因は、今までの理論ではあまり考慮されてこなかった。

### ◆ 売買理由の違い

例：新規、利食い、損切り の影響力の差

### ◆ タイムスパンの違い

例：ポジショントレーダーの買い vs. デイトレーダーの売り

### ◆ 規模の違い

例：大口少数の買い vs. 小口多数の売り

## 内部要因に関する話

以下のようなことが言われることがある(十分には検証されていないものがほとんどだが)。

- ◆ 相場は分足レベルから月足レベルまで、あらゆるレベルの投げ踏みの集合体である(買いの損切りを**投げ**、売り(空売り)の損切りを**踏み**という)。
- ◆ 大相場 → 中相場 → 小相場 → 大相場 → 中相場 → と循環するといわれる。
- ◆ 逆張りの期間が7割、順張りの期間が3割
- ◆ 市場規模に比べて大きなプレイヤーは市場を動かしてしまう(池の中の鯨)。
- ◆ 同じタイプの投資家が増えると利幅が減少する。また、過去に通用した手法は広く知られると通用しなくなる。

## モデル化の条件

投げ踏みによる変動など、内部要因の影響をモデルに取り入れるには、個別の投資家の**資金量**の概念および**淘汰**の仕組みを取り入れる必要がある(既存のエージェントモデルなどでは欠けていると思われる視点)。

内部要因の変遷を再現できるようなモデルが望ましい。

- ◆ 十分に多様な投資家を用意し、それぞれの投資基準に従って売買する

損の嵩んだ投資家は資金が減少し、影響力が少なくなる

利益を上げる投資家の資金は増えるが、市場に対する影響が増大すると利幅が減少する。

今まで損をしていた別のタイプの投資家が有利になる。

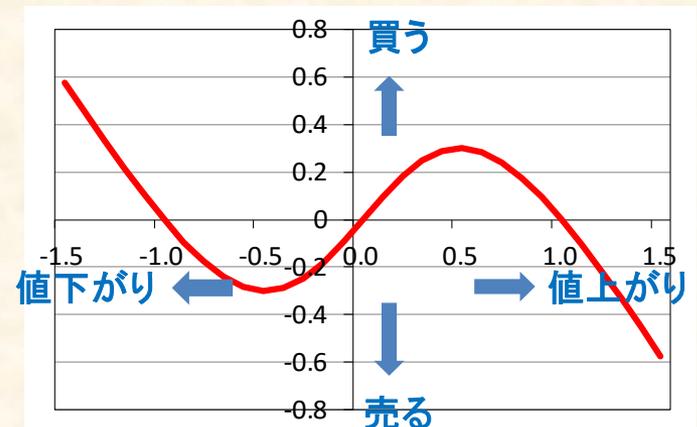
# モデリングの概要

- ◆ 市場を、各投資家の資金量を状態変数とする離散力学系として考える。
- ◆ 投資家を、時定数、リスク許容度、投資タイプ、の3つの尺度で特徴づける。

時定数 : 大(長期投資) ↔ 小(短期投資)  
 リスク許容度 : 大(ギャンブル的) ↔ 小(堅実)  
 投資タイプ  $k$  : 大(大きく狙う) ↔ 小(小幅狙い)

投資タイプについて:  $x$  を基準価格(後述)からの乖離としたとき、 $\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$  で表される量に比例するポジションを持つとする。

$$\varphi(x) = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$



## 指数平滑化移動平均

各投資家は、それぞれの記憶の中にある平均価格を基準とし、関数  $\varphi(x)$  に基づいて売買を行うものとする。

記憶は日々薄れていくものなので、遠い過去ほど重みが減少する加重平均である、**指数平滑化移動平均**を基準として用いるのが自然だと考えられる。

$p_i$  を時刻  $i$  における約定値段としたとき、時刻  $i$  における指数平滑化移動平均  $s_i$  は、以下で与えられる

$$\begin{aligned} s_i &= r(p_i + (1-r)p_{i-1} + (1-r)^2 p_{i-1} + \dots) \\ &= (1-r)s_{i-1} + rp_i \end{aligned}$$

ここで、 $0 < r < 1$  は時定数の逆数である。

つまり、時定数が大きい(=長期投資する)投資家ほど、投資判断において遠い過去まで重視すると言える。

	現実の市場 (東京証券取引所など)	モデルとして考える市場
売買の成立	五月雨式に非同期に売買が成立	一定時間ごとに売買が成立
約定値の刻み	銘柄により1円単位や10円単位など	任意の実数値を取る
売りのポジションを取れるか	一部銘柄のみ空売りが可能	常に可能とする
手数料	あり	なし

LME(ロンドン金属取引所)や昔の日本の商品取引所などでは、一定の時間ごとに売買を集約して約定値を決めている(板合わせ、板寄せ)。

東京証券取引所でも、寄り、前場引け、後場寄り、大引けの4回は板合わせとなっている。

## まとめると

各投資家の、時定数の逆数を  $r^{(m)}$ 、リスク選好度を  $a^{(m)}$ 、投資タイプのパラメータを  $k^{(m)}$  とする。

さらに、時刻  $i$  における約定値段を  $p_i$ 、指数平滑化移動平均を  $s_i^{(m)}$ 、各投資家の資金量(時価評価額)を  $v_i^{(m)}$ 、ポジションの量を  $y_i^{(m)}$  (プラスが買いでマイナスが売り)とし、

$$y_i^{(m)} = a^{(m)} \max(v_i^{(m)}, 0) \varphi \left( \frac{p_i - s_i^{(m)}}{k^{(m)}} \right)$$

が満たされるように各投資家のポジションを決める。また、売り注文と買い注文が均衡するように値段がつくので、

$$\sum_m (y_i^{(m)} - y_{i-1}^{(m)}) = 0$$

となるように  $p_i$  を決定する。

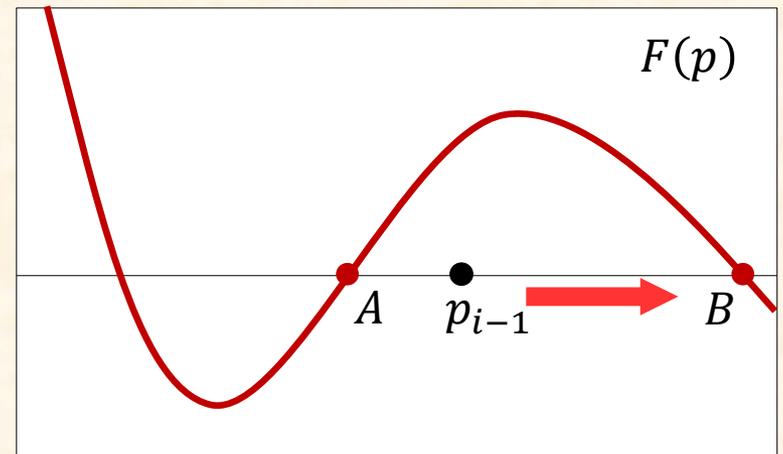
# 価格の決定

時刻  $i-1$  まで価格が決定しているときに、時刻  $i$  における価格  $p_i$  を決定する。

$$F(p) = \sum_m (y_i^{(m)} - y_{i-1}^{(m)}) \Big|_{p_i=p}$$

と置き、 $F(p) = 0$  となる  $p$  を、 $p_{i-1}$  を初期値とするNewton法によって求めて  $p_i$  とする。

ただし、 $F(p) > 0$  は買いが多いことを意味し、 $F(p) < 0$  は売りが多いことを意味するので、右図ではA点ではなくB点に収束させなければならない。



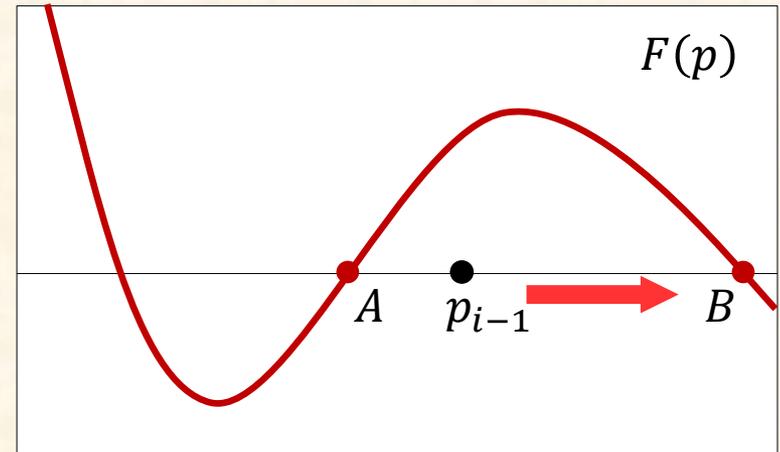
# Newton法

$\delta > 0$  を小さな定数とし、

$$d_n = \begin{cases} \delta, & F(x_n) \geq 0 \\ -\delta, & F(x_n) < 0 \end{cases}$$

と置いて、以下のような反復で収束先を求める。

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, & F'(x_n) < 0 \text{ and } \left| \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \right| < \delta \\ x_n + d_n, & F'(x_n) \geq 0 \text{ or } \left| \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \right| \geq \delta \end{cases}$$



## パラメータなど

投資家の数が少ない場合には、単純な発散パターンや振動パターンになることが多いが、ある程度、投資家の数を増やすと、実際の市場の値動きに似たような動きが見られた。

時定数を 2.0、 9.3、 43、 200 の4通り

リスク選好度を 0.1、 0.22、 0.46、 1.0 の4通り

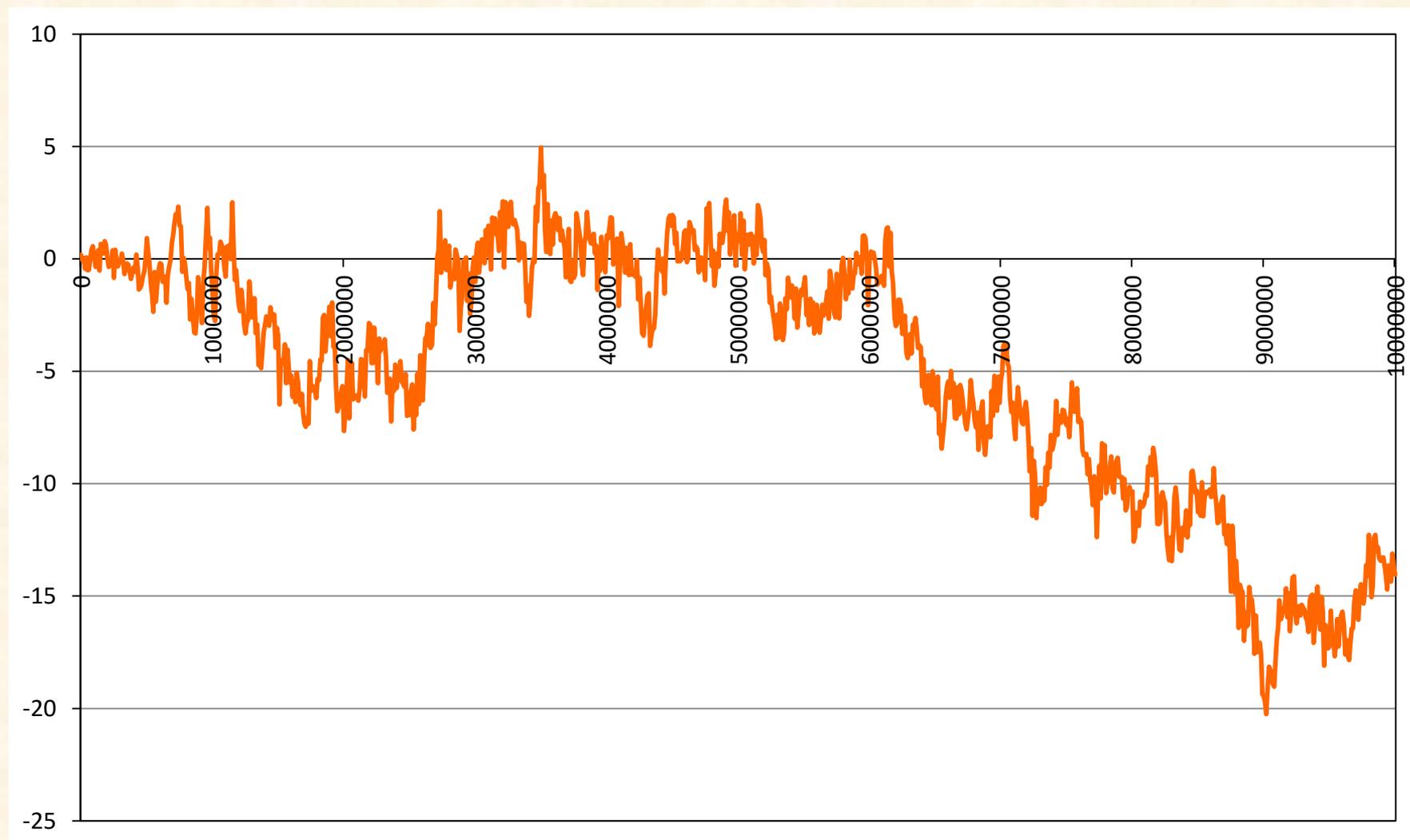
投資タイプ  $k$  を 0.1、 0.22、 0.46、 1.0 の4通り

の、64人の投資家を設定してシミュレーションを行った結果を次ページから示す。

ただし、 $\delta = 0.01$  とした。

# 計算結果

ランダムウォークに似たような動きが見られた。

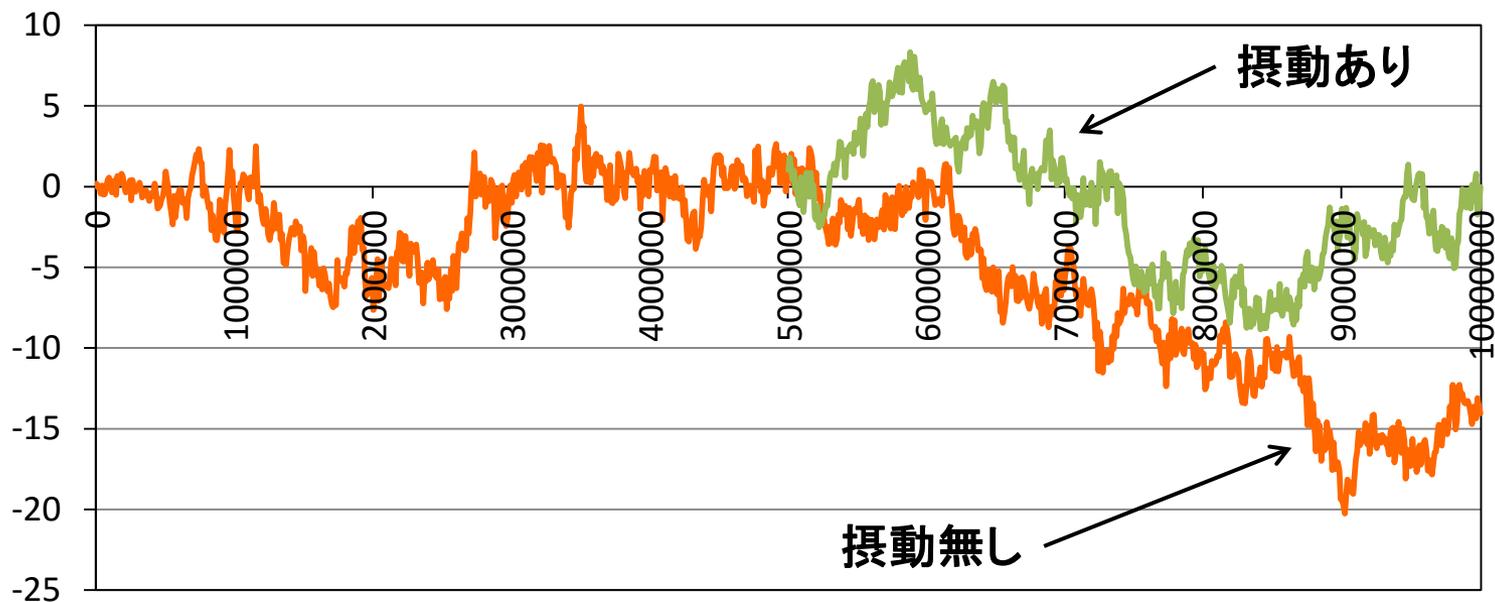


# 初期値鋭敏性の検証

反復回数500000回目に、投資家のうち一番資金の多い人の資金を0.01%だけ増加させるような摂動を加えた。

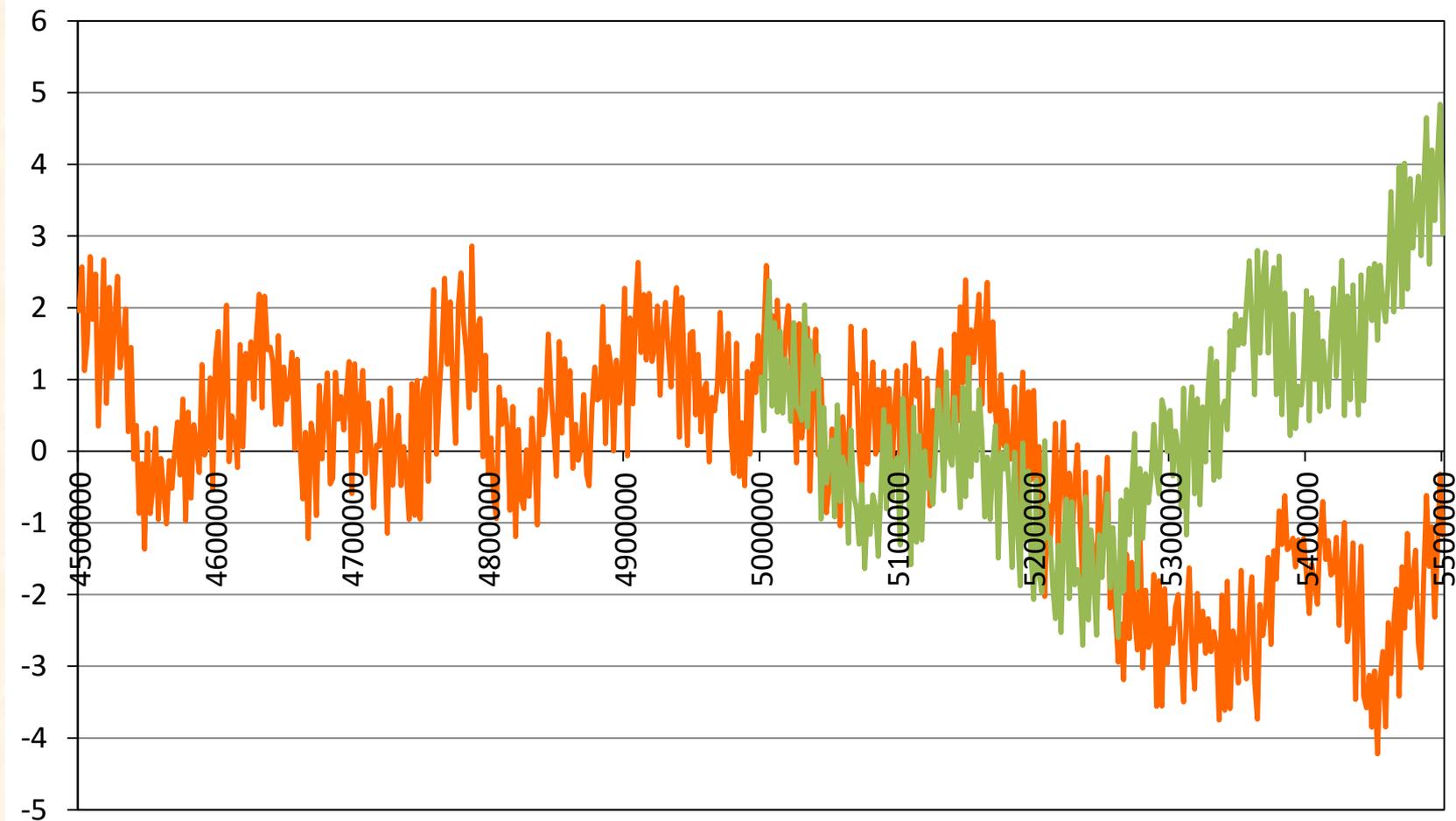
その結果、その後の値動きの挙動は大きく変化し、カオスに見られるような初期値敏感性が観察された。

➡ 値動きの予測可能性については悲観的な結果である。



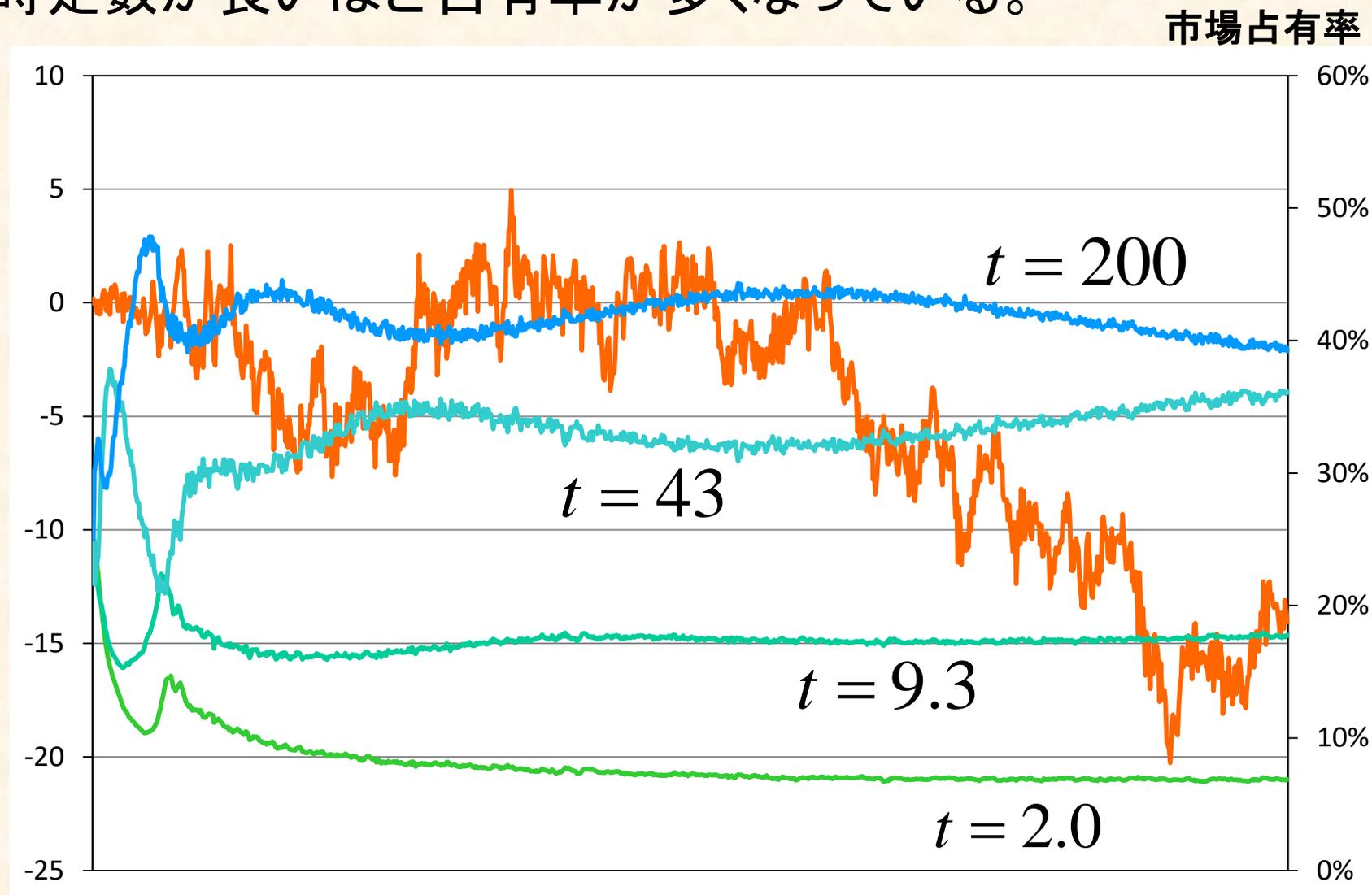
# 初期値鋭敏性の検証

ただ、短期予測なら可能かもしれない。



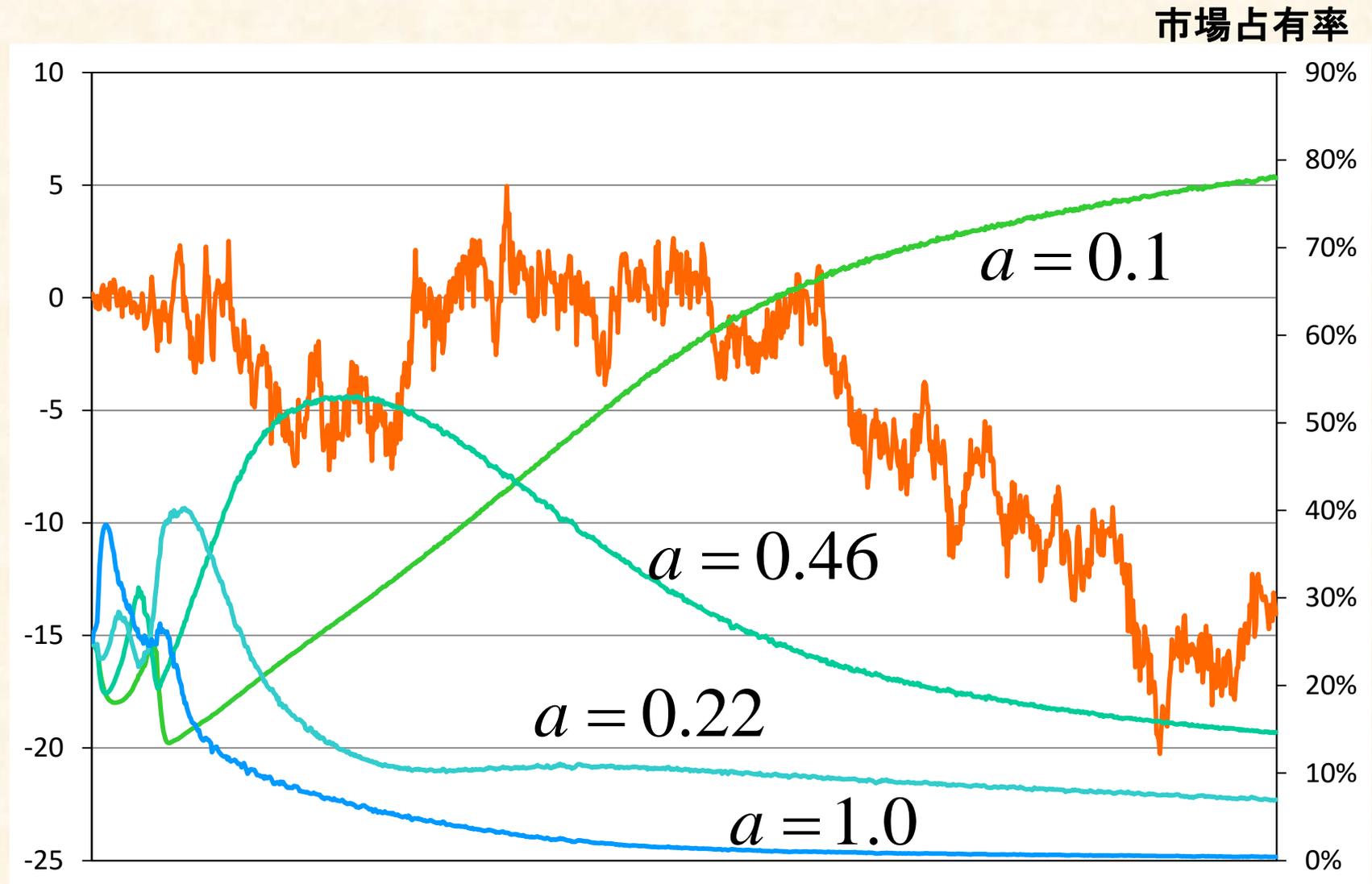
# 内部要因の遷移 — 時定数

時定数が長いほど占有率が多くなっている。



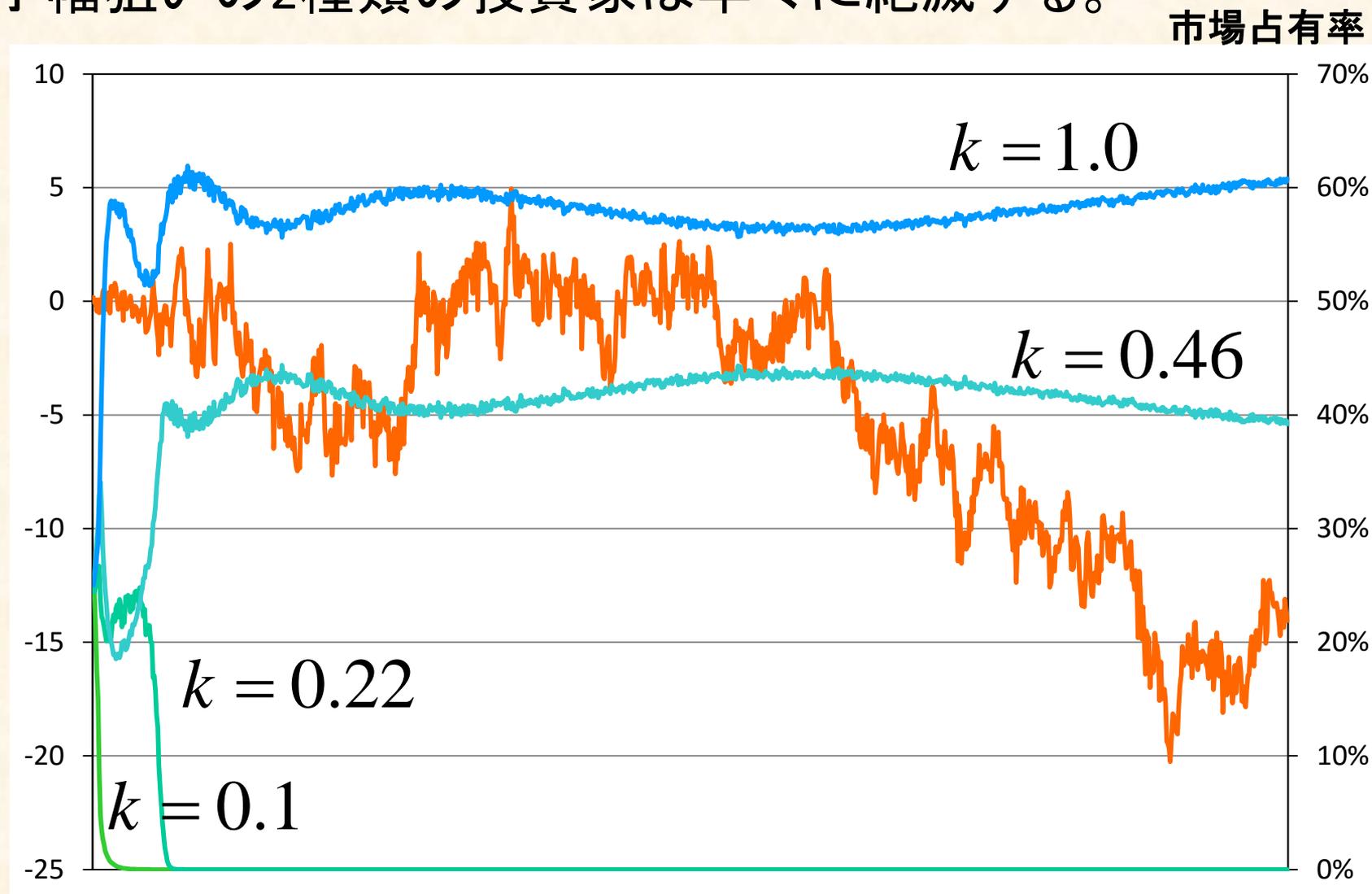
# 内部要因の遷移 — リスク許容度

リスク許容度の高いものほど資金の減少が急である。



# 内部要因の遷移 — 投資タイプ

小幅狙いの2種類の投資家は早々に絶滅する。

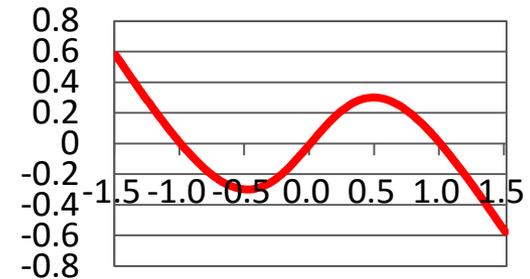


## 他の投資曲線を持つ投資家を投入

既に紹介した、小幅では順張り、  
大きく動いたときは逆張りで  
対処する投資家

➡ 80%

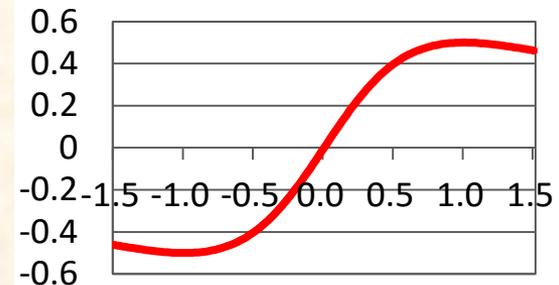
$$\varphi(x) = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2}$$



上がれば買い続け、下がれば  
売り続けるトレンドフォロー系  
の投資家

➡ 20%

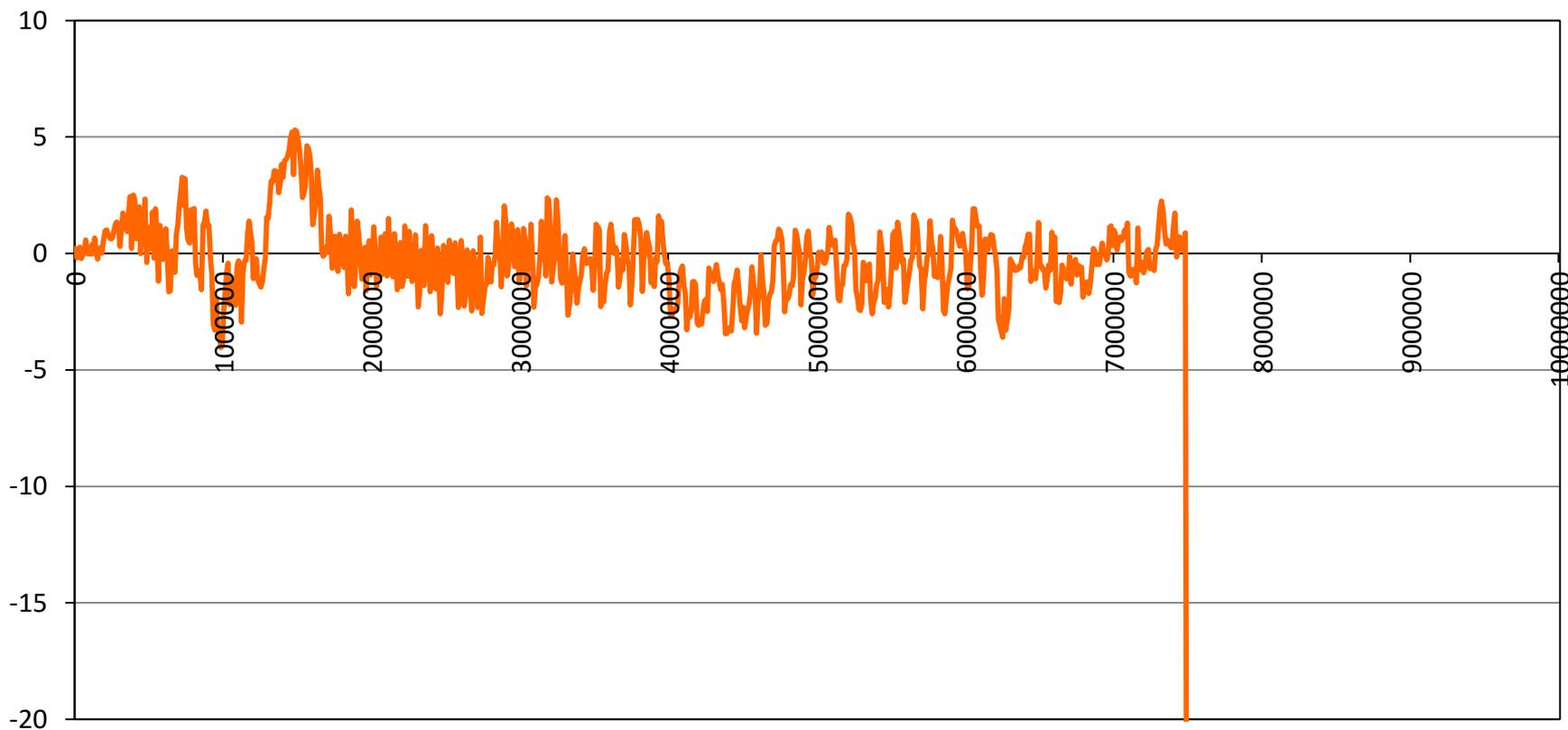
$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2}$$



の組み合わせでシミュレーションを行った。  
時定数、リスク許容度、投資タイプ等は同じ。

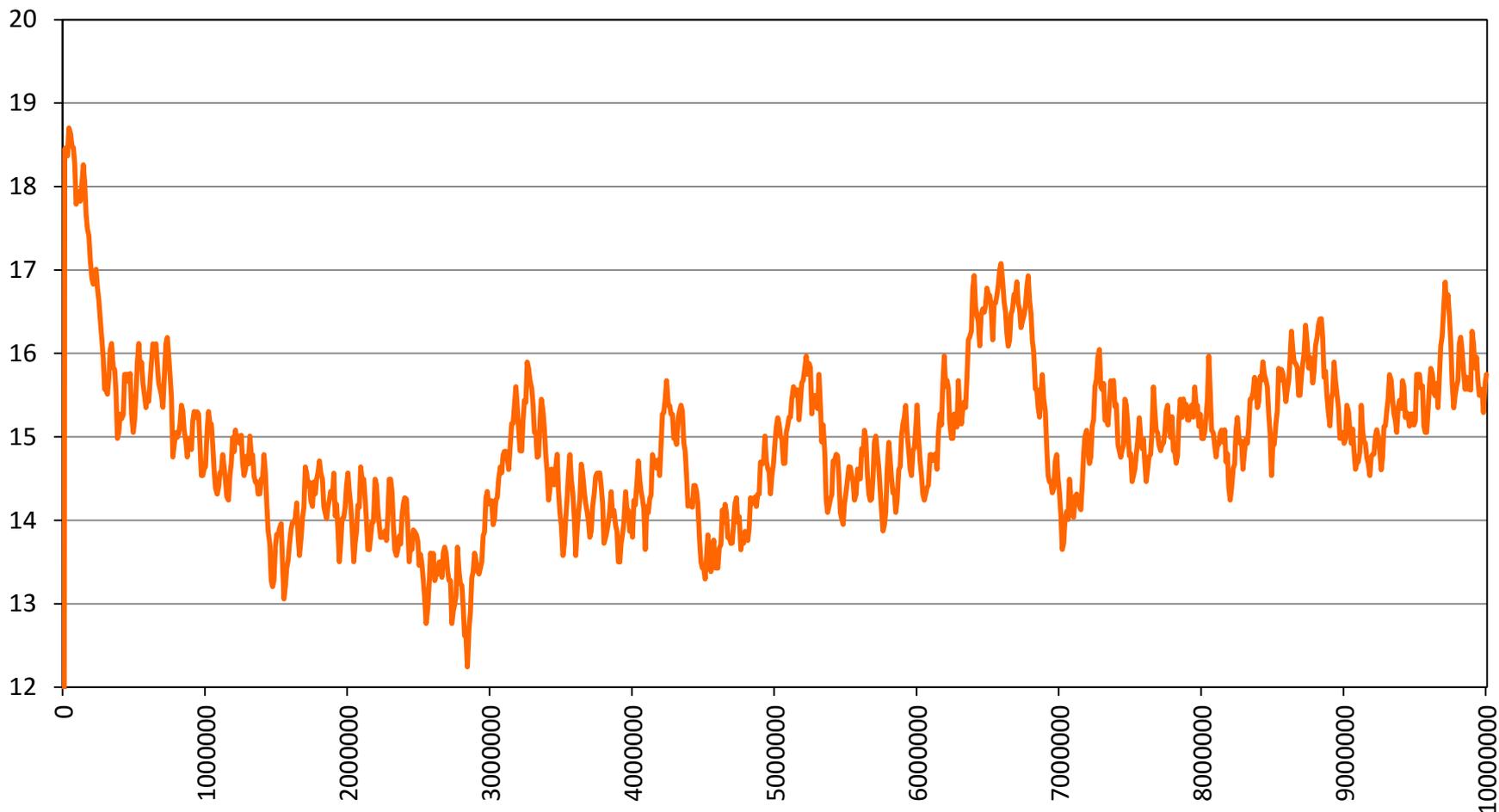
# 市場の崩壊

トレンドフォロー系の投資家の市場シェアが80%を超えてしばらくすると、市場が崩壊した。初期値を変えてシミュレーションを行っても、トレンドフォロー系の投資家が存在する限り、最終的には必ず市場崩壊が起きるようである、



# 他の計算結果

逆に、投資家が二人だけ(時定数のみ異なる)でもランダムな変動が見られた。  7次元の離散力学系



## 今後の課題1

今回は、局所的な近似として、上下に対称なモデルを考えたが、実際の値動きは、上下に非対称である。

例えば、値段は0以下にはならない。値段が高いほど変動が大きい。上げより下げの方が速い。

そのような動きを再現するため、

$$y_i^{(m)} p_i = a^{(m)} \max(v_i^{(m)}, 0) \varphi \left( \frac{1}{k^{(m)}} \log \frac{p_i}{s_i^{(m)}} \right)$$

など、価格の対数を基準にするポジション取りを色々試してみたが、今のところ発散する計算結果しか得られていない。



- ◆ このモデルで得られる価格変動の統計則を実際の市場と比較する必要がある。
- ◆ 投資家の数と種類を増やすことも必要。並列計算に非常に適しているので、適用を考えたい。
- ◆ 中央政府という投資主体を参加させても面白いだろう。
- ◆ 投資判断に取得原価を取り入れることも考えられる。
- ◆ 取引サーバーを用意し、アルゴリズムを自由にアップロードして売買させるというのも面白いかもしれない。
- ◆ 個人の裁量売買を参加させてもいいかもしれない。
- ◆ ただ、あまりに自由度が高過ぎると、価格変動の本質を探るという目的からは外れていくような気がする。

- ◆ 金融市場の価格変動を表し得ると思われるシンプルなモデルを考案した。
- ◆ その結果、単純な振動や発散のパターンではないという意味で、実際の価格変動に近いように思える価格変動の結果が得られた。
- ◆ カオスに見られる初期値敏感性が観察された。
- ◆ ランダムな要素を入れずに、このような動きを再現するようなモデルは、現状では他には無いものと思われる。
- ◆ 投資家の数を増やし、また、多様な投資行動を行う投資家を追加することで、更に実際の値動きに近い結果が得られるものと期待できる。
- ◆ 突発的な外部要因がどのように値動きに影響するか、など、今後、調べてみたいことは多くある。