数 問

数　　学

平成 31 年度（前期）

注　　意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

　(例)　受験番号 50001 番の場合 ⟶ | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 pを自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。

2 原点をOとする座標平面上の点Qは円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の部分を動く。点Qと点A$(2,\ 2)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たす点Pの軌跡を求め，図示せよ。

3 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする。また，α は1より大きい実数とする。曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\big(\alpha,\ f(\alpha)\big)$ における接線と x 軸の交点をQとする。点Qを通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする。

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ。

(2) $\alpha = 2$ とする。ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

4　原点をOとする座標平面上に，点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。点Pを中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する。ただし，Pは x 軸上にないものとする。Pを通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点をQとするとき，三角形OPQの面積の最大値を求めよ。

5　左下の図のような縦3列横3列の9個のマスがある。異なる3個のマスを選び，それぞれに1枚ずつコインを置く。マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする。縦と横の各列について，点数を次のように定める。

- その列に置かれているコインが1枚以下のとき，0点
- その列に置かれているコインがちょうど2枚のとき，1点
- その列に置かれているコインが3枚のとき，3点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする。たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の1列目と横の2列目の点数が1点，他の列の点数が0点であるから，$S=2$ となる。

(1)　$S=3$ となる確率を求めよ。

(2)　$S=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$S=2$ となる確率を求めよ。