数 問

数　学（経済学部）

平 成 31 年 度（後期）

注　　意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

　　（例）　受験番号 50001 番の場合 ⟶

5	0	0	0	1

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1　以下の問いに答えよ。

(1)　a，b を整数とする。2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数で，b の約数であることを示せ。

(2)　n を正の整数とする。$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ。

2　$f(x)$ は x の4次式で，x^4 の係数は1である。座標平面上の曲線 $C : y=f(x)$ は2点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 2)$ を通り，これら2点での C の接線は同一の直線 ℓ である。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　ℓ と平行で，ℓ と異なる直線 ℓ' が C に接する。ℓ' の方程式を求めよ。

(3)　ℓ' と C で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

3　n を2以上の整数とし，a_1 を実数とする。1枚のコインを $(n-1)$ 回投げる。k 回目（$1 \leqq k \leqq n-1$）に表が出れば $a_{k+1}=a_k+1$，裏が出れば $a_{k+1}=\dfrac{a_k}{k}$ として，実数 a_2，a_3，……，a_n を順に定める。

(1)　$a_1=1$ のとき，a_n が整数となる確率 p_n を n で表せ。

(2)　$a_1=3$ のとき，a_n が整数となる確率 q_n を n で表せ。

4　座標平面において，原点を中心とする半径5の円の周上または内部にある格子点（x 座標も y 座標も整数である点）の集合を S とする。集合 S の部分集合 A，B を

$$A=\{(a,\ b)\in S \mid \text{すべての整数}\ n\ \text{に対して}\ an^2+(a^2+b)n\ \text{が偶数となる}\}$$

$$B=\{(a,\ b)\in S \mid \text{ある整数}\ n\ \text{が存在して}\ an^2+(a^2+b)n\ \text{が奇数となる}\}$$

と定める。

(1)　集合 A の要素の個数を求めよ。

(2)　集合 B の要素の個数を求めよ。

5　次の［Ⅰ］，［Ⅱ］のいずれか一方を選択して解答せよ。なお，解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

［Ⅰ］　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\qquad y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

で与えられている。原点 O と P を結ぶ線分が時刻 $t=0$ から $t=s$（$s>0$）までに通過する部分の面積を s で表せ。

［Ⅱ］　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{2n}=a_n,\quad a_{2n+1}=a_n+a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。m を0以上の整数とする。

(1)　a_{2^m} と a_{2^m+1} を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$ の第 2^m 項から第 $(2^{m+1}-1)$ 項までの和

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k = a_{2^m}+a_{2^m+1}+\cdots+a_{2^{m+1}-1}$$

を b_m とする。b_{m+1} を b_m で表し，$\{b_m\}$ の一般項を求めよ。